



PRESENTACIÓN

El trabajo que ahora presentamos en forma de diapositivas está pensado, esencialmente, para los programas de especialización en modelos matemáticos correspondientes a un curso anual de Master o Doctorado de las Facultades de Economía y Administración y Dirección de Empresas de nuestras Universidades, aunque también de Ingeniería, por lo que se refiere al estudio y resolución de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, integrales e integro-diferenciales y sus sistemas) y en diferencias finitas o recurrentes, todas ellas de provechosas aplicaciones en la ciencia económica y la técnica, así como el Cálculo variacional o el Análisis armónico. Habida cuenta de sus características, se propone el seguimiento del presente curso a base de una clase o tema semanal para el logro de una buena asimilación de los contenidos. Puede dividirse en dos cuatrimestres: el primero comprendería las lecciones 1-12, ambas inclusive, mientras que el segundo abarcaría las 13-24.

Los métodos matemáticos avanzados que se emplean en este curso son también muy útiles en otras áreas del Análisis Económico o de la Ingeniería y su manejo resultará especialmente interesante a la hora de cursar otras disciplinas propias de aquellas carreras, como por ejemplo la Teoría Económica, la Econometría, la Hidráulica o la Teoría de Señales.

Fundamentalmente, el curso se desarrolla en el entorno de los sistemas dinámicos, cuyo estado evoluciona con el transcurso del tiempo en contraposición a los sistemas estáticos. Los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos, matemáticos y de otros tipos que constituyen sistemas abstractos que son, además, sistemas dinámicos. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos matemáticos que buscan representar, del modo más fidedigno posible, la estructura del mismo sistema.

Así pues, los sistemas dinámicos estudian la evolución de una magnitud física o económica (que en general la representaremos como X) a lo largo del tiempo t . Dicha evolución ha de seguir una ley en forma de ecuación infinitesimal o recurrente, y el objetivo es hallar el valor de X en cualquier tiempo t de un dominio temporal determinado, es decir $X(t)$. Si el dominio temporal es discreto, estamos trabajando en el ámbito de la dinámica discreta; si por el contrario, el dominio temporal no es discreto, como por ejemplo un intervalo de la recta real (ya sea acotado o no acotado), estamos trabajando en el ámbito de la dinámica continua.

Conceptualmente hablando, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales está más desarrollada que la de las ecuaciones en diferencias. Las relaciones existentes entre estos dos tipos de ecuaciones permiten exponer las teorías correspondientes siguiendo una línea similar para los dos tipos de análisis, continuo y discreto. En el caso lineal, se busca seguir un desarrollo paralelo entre los conceptos relativos a las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales. En el caso no lineal, el análisis de los sistemas discretos, por ejemplo, resulta mucho más complejo que el de los continuos.

Una característica fundamental del análisis dinámico, como se ha dicho, es la intervención de la variable tiempo. El tiempo puede intervenir en forma continua o bien discreta, utilizándose diferentes herramientas matemáticas según sea el caso respectivo (ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias). Desde el punto de vista matemático, si el tiempo es considerado como variable continua (esto es, que puede tomar valores entre dos consecutivos), la expresión del cambio temporal constituye una ecuación diferencial. Su resolución e imposición de condiciones de contorno permite obtener la función correspondiente. A partir del análisis de la teoría de las ecuaciones diferenciales se da respuesta a modelos de la teoría económica o de la mecánica que requieren un análisis dinámico y se fundamenta la interpretación de los modelos a la luz de la teoría matemática. Otro tanto podríamos afirmar acerca de las ecuaciones recurrentes.

Cada tema práctico viene precedido por otros con una serie de conocimientos teóricos, relativamente escuetos, que, a guisa de recordatorio, proporcionan al lector una referencia sucinta de todos aquellos conceptos, definiciones, proposiciones, lemas, teoremas, demostraciones, formulaciones y demás elementos teóricos indispensables -aunque no siempre suficientes- para la correcta resolución de los numerosos ejercicios prácticos que se proponen. El lector/a podrá comprobar, de forma inmediata, que los ejercicios poseen un elevado nivel de detalle en su desarrollo resolutivo, pretendiéndose con ello patentizar la necesaria relación existente entre éstos y los conocimientos teóricos aludidos, puesto que dichos ejercicios constituyen un medio poderoso de adquisición y de consolidación de los expresados conocimientos. Eso sí, como siempre, todos aquellos errores u omisiones que puedan aparecer en el texto serán de responsabilidad exclusiva del autor.

Es, sin duda, la práctica profesional la que hará surgir problemas nuevos a los que enfrentarse y resolver con rigor científico a través de los propios conocimientos. Y es que el cultivo del mecanismo abstracto no deja huella útil si no va acompañado del ejercicio de las facultades de abstracción y concreción a los problemas reales y de interpretación práctica de sus resultados. Tal es el carácter que no hemos querido obviar en el presente curso.

En este mismo capítulo introductorio se incluye una lista de referencias bibliográficas acerca de la que debo advertir, como suele suceder, que son todas las que están pero, evidentemente, que no están todas las que son. La selección ha sido realizada por gusto personal del docente y por aproximación al nivel del texto. Al final del curso, se adjuntan cinco apéndices útiles para el recordatorio y consulta de algunos de los temas o herramientas matemáticas tratadas en el cuerpo principal del mismo.

Mi reconocimiento, en fin, a las diversas instituciones que han apoyado nuestra iniciativa y, particularmente, a la Junta Rectora del Consorcio Universitario del Centro Asociado de Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), a la imprenta Gráfica Dertosense, S.L. y, en general, a todos cuantos se han interesado por la confección del presente curso, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño.

Tortosa, agosto de 2020.

J. M. FRANQUET

- ÍNDICE GENERAL DEL CURSO -

0. INTRODUCCIÓN – Pág. 4

Presentación – Pág. 6

Índice – Pág. 10

Bibliografía – Pág. 22

LECCIÓN 1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (I) – Pág. 30

1. Definiciones básicas

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

2.1. Ecuaciones diferenciales de variables separables

2.2. Ejemplo

2.3. Ecuaciones homogéneas

2.4. Ejemplos diversos

LECCIÓN 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (II) – Pág. 54

2.5. Ecuación lineal de primer orden

2.6. Ejemplos

LECCIÓN 3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (III) – Pág. 73

2.7. *Ecuación de Bernouilli*

2.8. *Ecuaciones diferenciales exactas*

2.9. *Ecuación diferencial no exacta. Factor integrante*

LECCIÓN 4. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (IV) – Pág. 97

1. **Ecuación de Riccati**

2. **Ecuación de Clairaut**

3. **Ecuación de Lagrange**

4. **Resolución por el método de las series de potencias**

5. **Resolución por substitución**

LECCIÓN 5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (V) – Pág. 119

1. **Introducción**

2. **Ecuación diferencial homogénea de orden n y coeficientes constantes**

2.1. *Generalidades*

2.2. *Raíces simples reales de la ecuación característica*

2.3. *Raíces múltiples reales de la ecuación característica*

2.4. *Raíces complejas de la ecuación característica*

3. **Ecuación diferencial no homogénea de orden n y coeficientes constantes**

3.1. *Generalidades*

3.2. *Ejemplos*

LECCIÓN 6. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (VI) – Pág. 141

3.3. $b(x)$ es un polinomio en x

3.4. $b(x)$ es una función exponencial de la forma $k \cdot e^{ax}$

LECCIÓN 7. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (VII) – Pág. 163

3.5. $b(x)$ es una función trigonométrica de la forma $(A \cdot \cos bx + B \cdot \sin bx)$

3.6. $b(x)$ como combinación lineal

LECCIÓN 8. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (VIII) – Pág. 182

1. Ecuaciones diferenciales de coeficientes variables

1.1. El polinomio $P(D)$ se puede descomponer en factores lineales

1.2. Ecuación de Euler-Cauchy

LECCIÓN 9. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS – Pág. 200

1. Introducción

2. Integral general de un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

2.1. Raíces simples de la ecuación característica

2.2. Raíces múltiples de la ecuación característica

3. Integral general de un sistema lineal completo con coeficientes constantes

LECCIÓN 10. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS (I) – Pág. 225

1. Ecuaciones lineales

1.1. Ecuaciones lineales de primer orden

1.2. Ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes y orden k

1.2.1. Introducción

1.2.2. Raíces reales distintas

1.2.3. Raíces reales múltiples

1.2.4. Raíces complejas

1.3. Ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes y orden k

1.3.1. Introducción

1.3.2. Si b_n es un polinomio

LECCIÓN 11. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS (II) – Pág. 251

1.3.3. Si b_n es una función exponencial

1.3.4. Si b_n es una expresión trigonométrica

1.3.5. Si b_n es una combinación lineal de los anteriores

2. Ecuación no lineal

3. Aplicación a la Teoría Microeconómica

4. Aplicación a la Ingeniería

LECCIÓN 12. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS – Pág. 270

- 1. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes**
- 2. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes**
- 3. Sistemas lineales de primer orden con coeficientes variables**
- 4. Sistema lineal equivalente**
- 5. Sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales**

LECCIÓN 13. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (I) – Pág. 303

1. Introducción teórica

1.1. Conceptos previos y definiciones

1.2. Ecuación diferencial lineal en derivadas parciales

2. Resolución de las EDP

2.1. Método de las características

2.2. Ejemplos de aplicación

3. Conceptos básicos en relación a la oferta y la demanda

LECCIÓN 14. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (II) – Pág. 330

1. EDP's lineales de segundo orden

1.1. Introducción

1.2. Tipos de EDP's lineales de segundo orden

2. Ejemplos de aplicación

LECCIÓN 15. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (III) – Pág. 350

1. Otros ejemplos de aplicación de EDP's de primer y segundo orden

LECCIÓN 16. SIST. DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. FUNCIONES MULTIVARIANTES – P. 375

1. Introducción y conceptos básicos

2. Sistemas hiperbólicos con coeficientes constantes

3. Problemas de valor inicial y de contorno para sistemas de primer orden con coeficientes constantes

4. Sistemas de EDP de interés en la Ingeniería

4.1. *Sistemas de EDP lineales*

4.2. *Sistemas de EDP no lineales*

5. Funciones multivariantes y EDP's

5.1. *Introducción*

5.2. *Ejercicios resueltos*

LECCIÓN 17. CÁLCULO DE VARIACIONES (I) – Pág. 397

1. Conceptualización

2. Extremos de una integral definida

2.1. *Integrando con derivadas de primer orden*

2.2. *Integrando con derivadas de orden superior al primero*

2.3. *Integrando con varias funciones*

2.4. *Integrando con funciones ligadas mediante relaciones*

3. Ejercicios de aplicación

LECCIÓN 18. CÁLCULO DE VARIACIONES (II) – Pág. 420

4. Nuevos ejercicios de aplicación

5. Cálculo de variaciones y eficiencia volumétrica de una instalación

LECCIÓN 19. CÁLCULO DE VARIACIONES (III) – Pág. 440

1. Ampliación del cálculo variacional y control óptimo

2. Generalizaciones del problema con fronteras fijas

3. Condiciones suficientes de extremo

3.1. Consideraciones previas

3.2. Campo de extremales

3.3. Condición de Jacobi

3.4. La función de Weierstrass

3.5. Condición de Legendre

4. Métodos directos en los problemas de Cálculo de Variaciones

5. Ejercicios de aplicación

LECCIÓN 20. FUNCIONES PERIÓDICAS Y ANÁLISIS ARMÓNICO (I) – Pág. 460

1. Funciones periódicas

2. Fórmulas de Euler

3. Desarrollo en serie de Fourier

4. Ejemplos

LECCIÓN 21. FUNCIONES PERIÓDICAS Y ANÁLISIS ARMÓNICO (II) – Pág. 479

1. La transformada de Fourier

1.1. Generalidades

1.2. Transformadas de algunas funciones conocidas

1.3. Tabla de transformadas de Fourier

2. Estudio del golpe de ariete hidráulico

2.1. Idea previa

2.2. Como ecuación en diferencias finitas

2.3. Como ecuación diferencial ordinaria

2.4. Como ecuación integro-diferencial

2.5. Como función de Bessel

2.6. Amortiguación exponencial

2.7. Aproximaciones asintóticas

LECCIÓN 22. ECUACIONES INTEGRALES – Pág. 510

1. Conceptos previos

2. Clasificación

3. Ecuaciones integrales de Volterra

4. Ecuaciones integrales de Freedholm

LECCIÓN 23. ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES – Pág. 540

- 1. Conceptualización**
- 2. Ejemplos de aplicación**

LECCIÓN 24. SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES – Pág. 568

- 1. Conceptos previos**
 - 1.1. Sistemas de ecuaciones integrales*
 - 1.2. La elasticidad demanda-precio*
- 2. Ejemplos de aplicación**

APÉNDICE I. SUPERFICIES CUÁDRICAS – Pág. 588

- 1. Conceptualización de las superficies cuadráticas o cuádricas**
- 2. Ejemplo 1**
- 3. Ecuación con términos rectangulares**
- 4. Centro de las cuádricas**
- 5. Clasificación de las cuádricas**
- 6. Ecuaciones reducidas del elipsoide, hiperboloide y conos**
- 7. Ecuación reducida de los paraboloides**
- 8. Ecuación reducida de los cilindros elípticos o hiperbólicos**
- 9. Ecuación reducida de los cilindros parabólicos**
- 10. Resumen de los invariantes de las cuádricas**
- 11. Ejemplo 2**

APÉNDICE II. EXTREMOS DE FUNCIONES MULTIVARIANTES – Pág. 606

1. Máximos y mínimos condicionados por relaciones de igualdad

2. Máximos y mínimos no condicionados

2.1. Definición

2.2. Condiciones necesarias de extremo

2.3. Condiciones suficientes para la existencia de extremos en el caso de dos variables

3. Métodos en la búsqueda de extremos condicionados

3.1. Introducción

3.2. Metodología y base teórica

3.2.1. Método de los operadores de Lagrange

3.2.2. Método de los determinantes jacobianos

3.2.3. Método de sustitución, eliminación o reducción de variables

3.2.4. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

3.2.4.1. Introducción

3.2.4.2. En la planificación de la producción

3.2.4.3. En la maximización de la utilidad

3.2.4.4. En la minimización de costes

4. Casos prácticos

5. Conclusiones

APÉNDICE III. TRANSFORMADA DE LAPLACE – Pág. 641

- 1. Introducción**
- 2. Tablas**
- 3. Notas explicativas de las tablas precedentes**
- 4. Ejemplos**
- 5. Transformada de una integral y otros ejemplos**

APÉNDICE IV. TEORÍA MATRICIAL ELEMENTAL – Pág. 660

- 1. Conceptos generales sobre matrices**
- 2. Clases de matrices**
- 3. Dimensión de una matriz**
- 4. Matrices iguales**
- 5. Operaciones con matrices**
- 6. Determinantes**
- 7. Matriz inversa**
- 8. Rango o característica de una matriz**
- 9. Valores y vectores propios**

APÉNDICE V. TEORÍA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS – Pág. 699

- 1. Definición y operaciones en el conjunto de los números complejos**
- 2. Forma binómica de un número complejo**
- 3. Suma y multiplicación de números complejos en la forma binómica**
- 4. Conjugado, módulo y argumento de un número complejo**
- 5. División de números complejos**
- 6. Raíces complejas de la ecuación de segundo grado**
- 7. Forma trigonométrica o polar de un número complejo**
- 8. Multiplicación y división de números complejos en su forma trigonométrica**
- 9. Fórmula de Moivre y forma exponencial**
- 10. Multiplicación y división de números complejos en su forma exponencial**
- 11. Raíces n -ésimas de un número complejo**
- 12. Logaritmo de un número complejo**
- 13. Ecuación de segundo grado con coeficientes complejos**
- 14. Sucesiones de números complejos**
- 15. Derivación de números complejos**
 - 15.1. Introducción*
 - 15.2. Propiedad*
 - 15.3. Operaciones con funciones analíticas*
 - 15.4. Condiciones de Cauchy-Riemann*
 - 15.5. Lemas importantes*
- 16. Integración de números complejos**
 - 16.1. Introducción*
 - 16.2. Integral definida de una función compleja de variable real*